Потенциалы Баргманна. Алгебраическая конструкция

Есть несколько методов построения n-солитонных решений для уравнения КдФ

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x. \tag{1}$$

По существу, все они сводятся к линейной алгебре и приводят к одной и той же явной формуле с некоторым определителем n-го порядка. Здесь мы опишем один из этих методов — обрыв формального ряда для ψ-функции по спектральному параметру (другие рассмотрим позже, если позволит время). Изложение разобъем на две части:

1) на этой лекции построим более общее семейство решений, включающее, кроме солитонных, также решения с полюсами. Это чисто алгебраическая конструкция;

2) на следующей лекции проанализируем это решение и выясним, как нужно выбирать параметры, чтобы решение не имело полюсов, а также получим выражение для фазового сдвига при взаимодействии солитонов.

Используем уже известный нам факт: уравнение (1) эквивалентно условию совместности линейных уравнений

$$\psi_{xx} = -(u+\lambda)\psi, \quad \psi_t = -u_x\psi - 2(2\lambda - u)\psi_x. \tag{2}$$

Далее всегда подразумевается, что u удовлетворяет (1) и система (2) совместна.

Утверждение 1. Система (2) допускает решение в виде так называемой формальной функции Бейкера–Ахиезера

$$\varphi = e^{-X}\Phi, \quad \Phi = 1 + \frac{\varphi_1}{2z} + \frac{\varphi_2}{(2z)^2} + \cdots, \quad z^2 := -\lambda, \quad X := zx + 4z^3t. \tag{3}$$

◄ Решение φ определяется по формальному ряду v, который мы строили при обращении преобразования Миуры:

$$\frac{\varphi_x}{\varphi} = v = -z + \frac{u}{2z} + \frac{u_x}{4z^2} + \ldots, \quad v^2 + v_x + u - z^2 = 0.$$

Зависимость от t определяется из совместного уравнения

$$\frac{\varphi_t}{\varphi} = -u_x + 2(2z^2 + u)v = -4z^2 + \frac{*}{2z} + \ldots,$$

где в правой части коэффициенты при z^1 и z^0 тождественно сокращаются. При интегрировании получаем решение вида (3). ►

При подстановке в (2) получаем

$$\Phi_{xx} - 2z\Phi_x = -u\Phi, \quad \Phi_t = -(u_x + 2zu)\Phi + 2(2z^2 + u)\Phi_x. \tag{4}$$

Приравнивая коэффициенты при степенях z, можно получить отсюда последовательность уравнений на φ_j. В частности, система по x имеет вид

$$\varphi_{1,x} = u, \quad \varphi_{j+1,x} = \varphi_{j,xx} + u\varphi_j, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Это можно интерпретировать, как рекуррентные соотношения для определения коэффициентов φ_j. При этом φ_j *не выражаются* как функции от динамических переменных, в отличие от коэффициентов ряда v (это ясно и из соотношения $\varphi = \exp(\int v\,dx)$, так как в v не все члены являются полными производными). Однако, нам это сейчас и не нужно. Выигрыш в переходе от ряда v к ряду Φ заключается в том, что уравнения (4) линейны и обладают следующим важным свойством.

Утверждение 2. Динамика по x и t совместна с условием обрыва $\varphi_j = 0$, $j > n$. Это условие равносильно (после умножения φ на $(2z)^n$) тому, что система (2) допускает решение вида

$$\varphi = e^{-X}\Phi, \quad \Phi = (2z)^n + \varphi_1(2z)^{n-1} + \cdots + \varphi_n. \tag{6}$$

◀ Для дифференцирования по x это следует из (5): если $\varphi_{n+1} = 0$, то $\varphi_{n+2}, \varphi_{n+3}, \dots$ также можно положить равными нулю. Для дифференцирования по t: если Φ, Φ_x многочлены по z, то из (4) следует, что это верно и для Φ_t, что и требуется. ▶

Условие обрыва выделяет некий специальный класс функций u. Действительно, оно превращает уравнения (5) в замкнутую систему ОДУ порядка $2n$:

$$\varphi_{j,xx} = \varphi_{j+1,x} - \varphi_j\varphi_{1,x}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad \varphi_{n,xx} = -\varphi_n\varphi_{1,x},$$

а функция u восстанавливается по решению этой системы, как $u = \varphi_{1,x}$. Аналогичную, более громоздкую систему можно выписать и по переменной t, но явный вид уравнений нам не понадобится. Можно было бы и систему по x не выписывать. Важно понять, что общее решение, которое мы таким образом можем получить, должно зависеть от $2n$ произвольных констант интегрирования.

Определение. Будем говорить, что функция $u(x)$ регулярна, если она вещественна, не имеет особенностей на всей оси x и быстро убывает при $x \to \pm\infty$. Регулярная функция называется потенциалом Баргманна, если соответствующее уравнение Шрёдингера $\psi_{xx} + (u + \lambda)\psi = 0$ допускает решение вида (6).

Как уже было сказано, построение общего совместного решения систем (4) при обрыве (6) сводится к линейной алгебре. Однако, это решение не обязательно регулярно. Условие регулярности выделяет подкласс многосолитонных решений. Пока что мы не будем его учитывать.

Утверждение 3. Пусть функция φ имеет вид (6) и $\bar\varphi=\varphi(-z)=e^X\Phi(-z)$. Тогда

1) вронскиан φ и $\bar\varphi$ не зависит от x и t, и является нечётным многочленом от z:

$$w=\varphi\bar\varphi_x-\varphi_x\bar\varphi=zQ(z^2)=z(z^2-k_1^2)\dots(z^2-k_n^2),\quad k_j=\mathrm{const}; \tag{7}$$

2) в точках $z=k_j$ отношение функций $\varphi,\bar\varphi$ также есть величина постоянная:

$$\frac{\bar\varphi(k_j)}{\varphi(k_j)}=c_j=\mathrm{const},\quad j=1,\dots,n.$$

◀ Используем уравнения (2), обозначив $a=u-2\lambda$:

$$\varphi_{xx}=-(u+\lambda)\varphi,\quad \varphi_t=-a_x\varphi+2a\varphi_x,$$

из которых следует также

$$\varphi_{xt}=-((u+\lambda)a+a_{xx})\varphi+a_x\varphi_x.$$

Так как эти уравнения содержат z только в чётных степенях, то $\bar\varphi$ является их решением наряду с функцией φ. Отсюда сразу получаем $w_x=\varphi\bar\varphi_{xx}-\varphi_{xx}\bar\varphi=0$; далее

$$\begin{aligned}(\varphi\bar\varphi_x)_t&=\varphi_t\bar\varphi_x+\varphi\bar\varphi_{xt}=(-a_x\varphi+2a\varphi_x)\bar\varphi_x+\varphi(-((u+\lambda)a+a_{xx})\bar\varphi+a_x\bar\varphi_x)\\&=a\varphi_x\bar\varphi_x-((u+\lambda)+a_{xx})\varphi\bar\varphi.\end{aligned}$$

Так как результат симметричен относительно $\varphi,\bar\varphi$, то $w_t=0$. Наконец, имеем

$$\partial_x\Bigl(\frac{\bar\varphi}{\varphi}\Bigr)=\frac{w}{\varphi^2},\quad \partial_t\Bigl(\frac{\bar\varphi}{\varphi}\Bigr)=\frac{2aw}{\varphi^2},$$

и при подстановке $z=k_j$ производные обращаются в 0. ▶

Итак, в нулях вронскиана функции φ и $\bar{\varphi}$ отличаются только на постоянные множители, то есть, выполняются соотношения

$$e^{X_j}\Phi(-k_j) = c_j e^{-X_j}\Phi(k_j), \quad X_j := X(k_j) = k_j x + 4k_j^3 t, \quad j = 1, \dots, n. \tag{8}$$

Подстановка $-k_j$ вместо k_j даёт, очевидно, то же самое, с заменой c_j на $1/c_j$, так что в каждой паре нулей работает лишь один. Параметрам c_j разрешается принимать значения 0 или ∞. Параметры k_j, c_j и есть те $2n$ констант интегрирования, которые определяют искомое общее решение.

Уравнения (8) это система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. В развёрнутом виде:

$$\begin{aligned}(c_j e^{-X_j} - e^{X_j})\varphi_n + 2k_j(c_j e^{-X_j} + e^{X_j})\varphi_{n-1} + \dots + (2k_j)^{n-1}(c_j e^{-X_j} + (-1)^n e^{X_j})\varphi_1 \\ = -(2k_j)^n(c_j e^{-X_j} + (-1)^{n+1} e^{X_j}), \quad j = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Её решение можно записать по формулам Крамера. Фактически, нам нужна только компонента φ_1, так u через неё выражается, по формуле $u = \varphi_{1,x}$. Чтобы компактно записать ответ, введём обозначение для вронскиана от произвольного набора функций

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

где верхний индекс обозначает производную по x.

Теорема. Пусть
$$y_j = c_j e^{-X_j} - e^{X_j}, \quad X_j = k_j x + 4k_j^3 t,$$
тогда функция
$$u = 2\partial_x^2 \log W(y_1, \dots, y_n) \tag{9}$$
является решением КдФ при произвольных параметрах k_j, c_j таких, что k_j^2 попарно различны и не равны 0.

◀ Имеем $y_j^{(s)} = (-k_j)^s (c_j e^{-X_j} - (-1)^s e^{X_j})$ и наша линейная система принимает вид
$$y_j \varphi_n - 2y_j' \varphi_{n-1} + (-2)^2 y_j'' \varphi_{n-2} + \dots + (-2)^{n-1} y_j^{(n-1)} \varphi_1 = -(-2)^n y_j^{(n)}, \quad j = 1, \dots, n.$$
В матричном виде имеем
$$\begin{pmatrix} y_1 & y_1' & \dots & y_1^{(n-1)} \\ y_2 & y_2' & \dots & y_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_n' & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ -2\varphi_{n-1} \\ \dots \\ (-2)^{n-1}\varphi_1 \end{pmatrix} = -(-2)^n \begin{pmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ \dots \\ y_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$
Определитель системы равен $W = W(y_1, \dots, y_n)$ и не равен тождественно 0 в силу предположения, что все k_j^2 различны. Тогда $(-2)^{n-1}\varphi_1 = \Delta/W$, где определитель Δ получается из W заменой последнего столбца на столбец свободных членов. Нетрудно видеть, что $\Delta = -(-2)^n W_x$, то есть, $\varphi_1 = 2W_x/W$, что и требуется. ▶

Итак, мы получили, чисто алгебраическим путём, огромный запас точных решений КдФ — зависящий от $2n$ произвольных параметров k_j, c_j. Отметим, что эти параметры могут быть и комплексными, вещественность нигде не использовалась в построениях. Конечно, нас в первую очередь интересуют вещественные решения u, но это не означает, что параметры должны быть вещественными. Если они вещественны, то функции Y_j можно записать (переобозначая c_j) в виде

$$Y_j = \sinh(k_j x + 4k_j^3 t + \delta_j) \quad \text{или} \quad Y_j = \cosh(k_j x + 4k_j^3 t + \delta_j).$$

Годятся также и

$$Y_j = \sin(k_j x + 4k_j^3 t + \delta_j) \quad \text{или} \quad Y_j = \cos(k_j x + 4k_j^3 t + \delta_j),$$

что отвечает замене $k_j \to ik_j$. Также можно брать пары комплексно-сопряженных k_j; нетрудно видеть, что при этом решение тоже останется вещественным. Однако, оказывается, что решения без полюсов возможны только при вещественных k_j и при этом нужно соблюдать еще некоторые правила выбора c_j. Подробнее это будет обсуждаться на следующем занятии. Пока что в программе `04_Wronskian formula for KdV.nb` можно поэкспериментировать с разными вариантами и посмотреть, что за решения при этом получаются.

В теореме не рассмотрен случай, когда вронскиан w имеет кратные нули. Система (8) становится тогда вырожденной, но это не означает, что исходная система (4), (6) не имеет решения, просто теперь рассмотрение нулей w даёт недостаточно информации для его построения. Мы пропустим этот класс, хотя он достаточно интересен и содержит рациональные решения и рациональные на солитонном фоне (при этом все вещественные решения обязательно имеют полюс).